Leçon 161 : Distances et isométries dans un espace affine euclidien.

On considère $\mathcal{E}$ espace affine de direction E, où $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace euclidien.

I. Généralités

1. Notion de distance

Définition 1.1 On définit la distance entre deux points A, B de $\mathcal{E}$ par $d(A,B) := \|\overrightarrow{AB}\|$ où $\|.\|$ est la norme associée à $\langle .,. \rangle$.

Proposition 1.2 La distance d ainsi définie vérifie bien l'inégalité triangulaire : pour tous $A,B,C \in \mathcal{E}$, $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$ avec égalité si et seulement si A, C, B sont alignés dans cet ordre.

2. Notion d'isométrie

Définition 1.3 On dit que $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une application affine s'il existe une application linéaire $\vec{f} : E \longrightarrow E$ telle que : $\forall M \in \mathcal{E}, \forall x \in E, f(M+x) = f(M) + \vec{f}(x)$.

Proposition 1.4 L'application $\vec{f}$ ainsi définie est unique et est appelée l'application linéaire associée à f. Pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on a : $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

Définition 1.5 On appelle isométrie de $\mathcal{E}$ toute application (affine) de $\mathcal{E}$ qui conserve les distances, c'est-à-dire : $\forall A,B \in \mathcal{E}$, $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$.

pas nécessaire : isométrie $\Rightarrow$ affine

On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries sur $\mathcal{E}$.

Exemples 1.6

les translations sont des isométries

les homothéties de rapport λ avec $|\lambda| \neq 1$ ne sont pas des isométries

Définition 1.7 Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie (vectorielle) si f conserve la norme : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries sur E.

Théorème 1.8 Les ensembles $O(E)$ et $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ munis de loi de composition sont des groupes, sous-groupes de $GL(E)$ et $GA(\mathcal{E})$.

Théorème 1.9 Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Alors f est une isométrie si et seulement si $\vec{f} \in O(E)$.

Définition 1.10 On appelle déplacement toute isométrie affine φ de $\mathcal{E}$ vérifiant $\vec{\varphi} \in SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$. On note $\varphi \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$.

Dans le cas contraire, φ est un antidéplacement de $\mathcal{E}$, on note $\varphi \in \mathrm{Isom}^-(\mathcal{E})$.

Proposition 1.11 On a $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ sous-groupe distingué de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.

II. Études de $O(E)$ et $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$

On considère ici que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Premières propriétés

Théorème 2.1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$
- l'image d'une b.o.n par u est une b.o.n.
- $\forall x,y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
- pour $\mathcal{B}$ b.o.n, ${}^tMM = M{}^tM = id$ où $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

Application 2.2 L'espace $O(E)$ est compact.

Théorème 2.3 Soit $u \in O(E)$, il existe alors une b.o.n $\mathcal{B}$ de E et $\theta_1, \dots, \theta_r \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix} \quad \text{avec } R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Application 2.4 L'espace $SO(E)$ est connexe par arcs.

Définitions 2.5 On considère $u \in O(E)$ de réduction donnée par le théorème 2.3, on dit alors que u est :

- une réflexion si $p = n-1$, $q = 1$, $r = 0$
- un renversement si $p = n-2$, $q = 2$, $r = 0$
- un retournement si $p = 1$, $q = n-1$, $r = 0$

2. Générateurs

Théorème 2.6 Tout élément $u \in O(E)$ est le produit de $r = rg(u - id_E)$ réflexions.

En particulier, les réflexions engendrent $O(E)$.

Corollaire 2.7 Tout isométrie $\varphi \in Isom(E)$ s'écrit comme composée de p réflexions avec $p \leqslant n+1$.

Théorème 2.8 Le groupe $SO(E)$ est engendré par les renversements pour $n \geqslant 3$.

Lemme 2.9 Pour $n \geqslant 3$, τ_1, τ_2 des réflexions de $O(E)$. On a $\tau_1 \tau_2$ est le produit de deux renversements.

III. Isométries du plan et de l'espace

1. Classification pour $n = 2$

Définition 3.1 Une isométrie positive est appelée rotation.

Proposition 3.2 Le groupe $SO(E)$ est commutatif, isomorphe à $\mathbb{U}$.